Osaka University Knowledge Archive

Title	Alegebra ノ Separability ニ就テ
Author(s)	池田, 正験
Citation	全国紙上数学談話会. 2(12) p.365-p.369
Issue Date	1948-12-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75255
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

121. Algebra ノ Separability ニ就テ

池田正驗（23. 9. 30）

Algebra $\mathfrak{a}$ ノ Separability ニ関シテ Hochschild ハスベテノ two-sided $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{p}$ ニツイテ $H^{(1)}(\mathfrak{a} : \mathfrak{p}) = 0$ ナル必要充分條件ヲ出シテヰルガ.（Ann. of. math. 46 1945）此処デハ少シ形ノ違フ Th. I. 及ビ上ノ $\mathfrak{p}$ ニ制限ヲツケタ Th. 2 ヲ証明シマス.

Lemma 1

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{F}$ ノ上ノ Simple alg. $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{a}$ ノ centrum 且 $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}(c_1 \cdots . c_m)$

$c_i^p = \gamma_i \in \mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}$ ノ標数 $p \neq 0$ トスルト

$$\mathfrak{D}/\mathfrak{g} \cong \mathfrak{E}$$

但 $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{a}$ ノ over $\mathfrak{F}$ ナル derivation alg.

$\mathfrak{g}$: $\mathfrak{D}$ ノ inner derivation ノツクル ideal

$\mathfrak{e}$: $\mathfrak{L}$ ノ over $\mathfrak{F}$ ナル derivation alg.

註）コノ Lemma ハ Jacobson ノ abstract derivation and Lie algebras (Trans Am. Math 1937 (42) P. 220) ニヨル.

Lemma 2

$\mathfrak{a}$: semi-simple alg. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0 \longrightarrow \mathfrak{a}$: Separable.

Proof

$\mathfrak{a}$ ハ Semi-simple ナル故 Simple components ノ直和デ components ノソレ自身ノ中ヘノ derivation ハ $\mathfrak{a}$ ノ derivation ニ拡張出来ルカラ. $\mathfrak{a}$ ガ inseparable simple ノ時 $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \neq 0$ ナル事ヲ示セバ充分デアル.

ヨッテ $\mathfrak{a}$ inseparable simple トスル.

$\mathfrak{a}$ ノ centrum $\mathfrak{L}$ トスル. $\mathfrak{L} \geqq \mathfrak{F}$ デアル. $\mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ inseparable extension デアルカラ $\mathfrak{L} \geqq \mathfrak{L}^{(p)} \geqq \mathfrak{F}$ $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(p)}(c_1 \cdots\cdots . c_m)$

$c_i^p = \gamma_i \in \mathfrak{L}^{(p)}$ (Albert : structure of alg. p. 33) $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{L}^{(p)}$ ノ上ノ alg. ト方ヘテ ソノ derivation alg. ヲ $\mathfrak{D}'$ トスルト $\mathfrak{D}'$ ハ $\mathfrak{a}$ ヲ

$\mathfrak{k}$ ノ上ノ alg. ト考ヘテ、ソノ derivation alg. $\mathfrak{D}$ ノ Subalg. ($\mathfrak{L}^{(P)}$ ヲ constants field トスル如キノト考ヘラレル。即チ $\mathfrak{D} \supseteqq \mathfrak{D}'$ 又明ラカニ inner derivation ノツクル ideal $\mathfrak{I}$ ハ $\mathfrak{L}^{(P)}$ ヲ constants field トスルカラ $\mathfrak{D}' \geqq \mathfrak{I}$. シカルニ Lemma 1 ニヨリ $\mathfrak{D}'/\mathfrak{I} \cong \mathfrak{E}$.
但 $\mathfrak{E}$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ $\mathfrak{L}^{(P)}$ ノ上ノ derivation alg. 且 $\mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{L}^{(P)}$ ノ inseparable extension ナル故 $\mathfrak{E} = 0$ ∴ $\mathfrak{D}'$ 従ッテ $\mathfrak{D}$ ハ inner ナラザル derivation ヲ含ム.

$\therefore H^{(1)}(\mathfrak{a}.\mathfrak{a}) \neq 0$

Th. 1. $\mathfrak{a}$: alg. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{b}:\mathfrak{b}) = 0$ for all ideals $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$
$\rightleftarrows$ $\mathfrak{a}$: separable

Proof

(→ ノ証明) $\mathfrak{a}$ ガ semi-simple デナイトスル. radical ヲ $\mathfrak{n}$.
$\mathfrak{n}$ ノ exponent ρ トスル. $\rho > 1$
上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{n}^{\rho-1}, \mathfrak{n}^{\rho-1}) = 0$
即 f ヲ derivation トスルト $f(n) = nt - tn$ $n \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$
$t \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$ ナル t ガアル.
$(\mathfrak{n}^{\rho-1})^2 = 0$ ヨリ $f(n) = 0$ for all $n \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$
ヨッテ derivation ハ 0 以外ニナイ.
シカルニ $\varphi(n) = n$ ナル mapping ハ linear デアリ
且 $\varphi(nm) = nm = 0$ $n\varphi(m) + \varphi(n)m = 2nm = 0$.
$n, m \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$
$\therefore \varphi(nm) = n\varphi(m) + \varphi(n)m$
∴ φ ハ non-zero derivation コレハ矛盾
∴ $\mathfrak{a}$ ハ semi-simple デナケレバナラヌ.
上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}.\mathfrak{a}) = 0$ 故ニ Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}$ ハ separable.

(← ノ証明)
$\mathfrak{a}$ ガ separable ナラ ソノ ideal ハスベテ separable. 従ッテ $H^{(1)}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0$ for all ideal $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ ハ明ラカデアル.

Example ($H^{(1)}(\mathfrak{n}:\mathfrak{a})=0$ ダケデハ一般ノ $\mathfrak{a}$ ハ separable ヲ結論出来ナ(例)

Kハ標数2ノ field. $\mathfrak{a}=Ka+Kb$ $a^2=a,\ ab=b,\ ba=0\ \ b^2=0$ ニヨッテ定義サレル alg. $\mathfrak{a}$ ハ radical (b) ヲモツ. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{a})=0$ デアル. ソレハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}$ ナル derivation (0 ナラザル) ハ

$$f_1\begin{cases}a\to b\\ b\to 0\end{cases}\quad f_2\begin{cases}a\to b\\ b\to b\end{cases}\quad f_3\begin{cases}a\to 0\\ b\to b\end{cases}$$ デ

f_1 ハ b ニヨリ与エラレル inner derivation

f_2 ハ $a+b$ ニヨリ与エラレル inner derivation

f_3 ハ a ニヨリ與エラレル inner derivation

ナルコトニヨリ分ル.

Th. 2 $\mathfrak{a}$: alg ノ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}/\mathfrak{c})=0$ for all ideals $\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{c}$ (但 $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{c}$ ハ $\mathfrak{a}$ 又ハ 0 ナルコトヲ許ス) $\rightleftarrows$ $\mathfrak{a}$: separable

但. $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ ハ Elementweise $=a*\mathfrak{b}/\mathfrak{c}=\bar{a}\cdot\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}*a=\mathfrak{b}/\mathfrak{c}\cdot\bar{a}$ ($a\in\mathfrak{a}$ $\bar{a}$ ハ a ノ属スル $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ ノ class) ニヨッテ two-sided $\mathfrak{a}$-module ト考エル.

Proof

($\rightarrow$ ノ証明)

1) $\mathfrak{a}$: Semi-Simple ナル時ハ 上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{a})=0$ 故ニ Lemma 2 ニヨッテ $\mathfrak{a}$: separable.

2) $\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{n}$ (radical) トスル.

$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ derivation ヲ f トスル.

$f^*(a)=f(\bar{a})$ ニヨッテ linear ナ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ mapping f^* ヲ定義スルト. $f^*(ab)=f(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}f(\bar{b})+f(\bar{a})\bar{b}=a*f^*(b)+f^*(a)*b$ ヨリ f^* ハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ derivation.

上ノ條件カラ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}/\mathfrak{n})=0$ ダカラ $\bar{c}\in\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ガアッテ

$f(\bar{a})=f^*(a)=a*\bar{c}-\bar{c}*a=\bar{a}\cdot\bar{c}-\bar{c}\cdot\bar{a}$

$\therefore$ $H^{(1)}(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}:\mathfrak{a}/\mathfrak{n})=0$ 且 $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ハ semi simple. 故ニ Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$: separable 故ニ $\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{a}^*+\mathfrak{n}+\mathfrak{N}$

subalg $\mathfrak{a}^*$ ガ存在スル。

$\mathfrak{n}^2=0$ ナル時ハ　$f(n)=n.\quad n\in\mathfrak{n}.$

$f(a^*)=0\quad a^*\in\mathfrak{a}^*$

$f(a)=f(a^*)+f(n)\quad a=a^*+n\in\mathfrak{a}$

ニヨリ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}$ ナル linear mapping f ヲ定義スルト

$\mathfrak{n}^2=0$ ナルコトヲ使ヘバ

$f((n+a^*)(m+b^*))=f(nm+a^*m+nb^*)+f(a^*b^*)$

但 $n\ m\in\mathfrak{n}\ a^*.b^*\in\mathfrak{a}^*$

$=f(a^*m+nb^*)=a^*m+nb^*$

又 $(n+a^*)f(m+b^*)+f(n+a^*)(m+b^*)=(n+a^*)m+n$

$(m+b^*)=a^*m+nb^*$

$\therefore f((n+a^*)(m+b^*))=(n+a^*)f(m+b^*)+f(n+a^*)(m+b^*)$

故ニ f ハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}$ ナル derivation.

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}.\mathfrak{n})=0$ ナル故 f ハ inner デアル.

ヨッテ $f(n)=n\tau-\tau n.\quad \tau\in\mathfrak{n}\quad \mathfrak{n}^2=0$ ヨリ

$f(n)=0$ · for all $n\in\mathfrak{n}$

ナルニ $f(n)=n.$　コレハ矛盾　$\therefore \mathfrak{n}=0$ デナケレバナラナイ.

$\mathfrak{n}^2\neq 0$ ナル時ハ

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)=0$　$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ derivation

ヲ f トスレバ $f^*(a)=f(\bar{a})$ （但 $a\in\mathfrak{a}$ $\bar{a}$ ハ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ ノ a ノ屬スル

class）ニヨリ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ linear mapping f^* ヲ定義

スルト f^* ガ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ derivation ナルコトハ前ト同様

ニ証明出来ル. 又 f^* ガ inner ナル事ヨリ f ガ inner ナル事モ又前

ト同様ニ云エルカラ　$H^{(1)}(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2:\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)=0$

$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ ノ radical ハ $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$　$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2\cong\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ separable

ヨリ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2=\mathfrak{a}'/\mathfrak{n}^2+\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$

$(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)^2=0$

コレハ前ノ場合ト同ジデアルカラ　$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2=0\quad\therefore\mathfrak{n}=\mathfrak{n}^2=0$ デアル

從ッテ $\mathfrak{a}$ ノ semi-simple ナル事ガ知レル. 即チ 1) ニヨッテ $\mathfrak{a}$

ノ Separable ナル事ヲ知ル.

(← ノ証明)

Hochschild ノ結果カラ明ラカデアル.

以上ニヨツテ, Hochschild ノ條件ノスベテノ two-sided $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{p}$ ノ代リニ上ノ様ナ $\mathfrak{k}/\mathfrak{c}$ テオキカヘテ置イテ充分デアル事ガワカツタノデスガ 二 三 ノ例ニツイテ見ルト radical ノ現ハレル alg. $\mathfrak{a}$ デハ $\mathfrak{a}$ カラ radical ヘノ derivation ガ inner テナクナリ 從ツテ 上ノ條件ヲ 單ニ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = 0$ for all ideal $\mathfrak{k} \equiv \mathfrak{a}$ デ置キ換ヘラレルノデハナイカト思ハレマス.

然シコレハ少シ難カシクテ証明出来マセン. 以上